

Kom låt oss bråka

Den vackra linblommans stjälk innehåller en fiber som kan användas till att göra kläder, men vägen från blommande ört till färdigt linnetyg är lång. Kanske är det någon som fortfarande sjunger om att skörda linet under dansen kring midsommarstången, eller har en vacker skätkniv på väggen hemma som för länge sedan överlämnats som fästmansgåva till en släkting. Förr var det en vanlig syssla på svenska gårdar och orden för de olika momenten i linberedningen var välkända, men idag är det få som vet vad de innebär. I tur och ordning ska linet:

skördas

torkas

repas

rötas

bråkas

skäktas

häcklas

spinnas

vävas.



Att bråka linet innebär att linstrået krossas så att den vedartade skärven går sönder och kan avskiljas från den mjuka fibern. Att bråka handlar alltså om att bryta sönder. Helheten bryts sönder till delar som var för sig är mindre än helheten. Att bråka är att söndra.

Ordet bråka härstammar från tyskan. I lågtyskan finns orden *breken*, med betydelsen att bryta sönder, och *braken*, som betyder att bullra och är besläktat med svenskans *brak*. I modern tyska finns orden *brechen*, som betyder att knäcka eller krossa, och *Bruch* som är det ord som används både för ett matematiskt bråk och inom medicin för exempelvis ett benbrott. Samma gemensamma härstamning finner vi även i ordet *fraction* som används för bråk

på både engelska och franska. Fraction kommer från latinets *fractio* som på svenska ligger till grund för den medicinska termen *fraktur*.

För några år sedan rättade jag TIMSS-prov genomförda av elever i årskurs 4. På en fråga som löd "Vilket bråk representeras av de svarta cirkelarna i bilden?" hade en del elever svarat "De kanske är ovänner" eller "Mobbing". Dessa svar tyder på att den matematiska betydelsen av ordet bråk var okänd för eleverna. Kanske hade de inte alls mött ordet eller så hade det funnits med i boken lite i periferin, i ett kapitel som ur elevens perspektiv handlade om att färglägga pizzadelar. För att ett ord ska fyllas av mening och bli del av en människas aktiva ordförråd måste det användas explicit. Att koppla ordet till besläktade ord och visa på likheter och skillnader kan göra ordet mer levande. Ord är redskap som vi använder för att kommunicera om de matematiska idéerna de representerar. Att förstå orden som omger bråkbegreppet är att vidga förståelsen av själva begreppet. Vi ska titta lite närmare på andra ord som har med bråk att göra.

Allmänna bråk och decimalbråk

Jag bläddrar i en liten bok med titeln "Aritmetisk exempelsamling", skriven 1887 av Larsson och Lundahl. Den femte utgåvan från 1913 innehåller 1290 exempel, varav 160 behandlar decimalbråk och 250 allmänna bråk. Därefter kommer ytterligare 320 exempel på "tillämpningsuppgifter" där alla sorters bråk förekommer. Termerna allmänna bråk och decimalbråk togs bort ur den svenska skolmatematiken på 1960-talet och det är därför lätt att tro att skillnaden mellan dem är oviktig. Men historiskt representerar de två avgörande kliv i aritmetikens utveckling.

Under antiken sågs bråk bara som förhållanden mellan heltal, eller som andelar som var mindre än en hel. De betraktades inte som tal i egen mening, som går att räkna med enligt de vanliga räkneregler. Egyptierna använde sig enbart av stambråk, det vill säga bråk med täljaren 1. Olika stambråk radades upp efter varandra istället för att adderas. Man kunde efter delning få en rest på $\frac{1}{2}$ och $\frac{1}{4}$, men kom inte på att notera detta som $\frac{3}{4}$. Det var först efter att positionssystemet fått genomslag som bråken började betecknas på ett mer standardiserat sätt. På 600-talet kom indierna på att bråk kunde skrivas med olika heltal i både täljare och nämnare. Araberna fullbordade skrivsättet med att införa det horisontella bråkstrecket. Den nya notationen var revolutionerande eftersom den gjorde det möjligt att behandla bråk som tal och därmed utföra alla sorters beräkningar med bråk.

Genom att det moderna talsystemet bygger på bas 10 är det smidigt att använda bråk där nämnaren utgörs av dekadiska tal, det vill säga tiondelar, hundradelar och andra potenser av 10. Sådana bråk kallas för decimalbråk. Trots att 10-bassystemet infördes redan på 500-talet tog det ända till 1500-talet innan matematiker började utnyttja systemet för att skriva bråkdelen på samma sätt som heltalen. Siffrans platsvärde bestämde delen och en liten cirkel, senare en punkt, kom att användas för att avskilja heltalsdelen av talet från bråkdelen. Fortfarande används decimalpunkten i de anglosaxiska länderna och i många digitala verktyg, medan vi i Sverige använder decimalkomma, som infördes av holländaren Willebrord Snellius på 1600-talet.

I det praktiska livet dröjde sig bråkformen kvar eftersom de måttssystem som användes inte byggde på tiopotenser. Både pengar och mått på exempelvis längd och vikt behövde uttryckas med olika nämnare. År 1850 infördes först

ett decimalsystem för längdmätning och 1889 infördes metersystemet som mäter både längd, area, volym och vikt med ett decimalsystem som utgår från 1 meter. Omställningen till decimalsystemet var besvärlig för vanligt folk, vilket inte minst blir uppenbart av att exempelsamlingen från 1887 är noga med att göra skillnad på decimalbråk och allmänna bråk. För elever i folkskolan innebar decimalbråken både ett nytt decimalt måttssystem och ett nytt sätt att skriva bråk. Exempel 158 i femte upplagan av *Aritmetisk exempelsamling*:

- 158 Teckna med användning av decimalkomma a) 45 tiondelar, b) 63 hundra-
radelar, c) 875 hundradelar, d) 55 tusendelar, e) 4 367 tusendelar!

I en recension av exempelsamlingen införd i tidningen *Folkskolans vän* kritiserades valet av decimalkomma eftersom det fanns en konvention att använda komma som avskillnad mellan tusental och hundratal. Samma konvention finns idag kvar i Amerika där decimaler istället avskiljs med en punkt.

Emedan de flesta menniskor vant sig att använda komma för att skilja de hela talens siffergrupper från hvarandra, så bidrager det till oreda, att författarne beteckna trehundraertiofem hela tvåhundra femton tusendelar med 335,215 eller på samma sätt som flertalet vuxna beteckna talet trehundraertiofem tusen tvåhundra femton hela.

Täljare och nämnare

Även orden täljare och nämnare är hämtade från tyskan. Ordet täljare kommer från *Zähler*, som har samma rot som *erzählen* som betyder berätta. Täljaren förtäljer, det vill säga talar om, hur många bråkdelar det rör sig om. Ordet nämnare kommer från *Nenner*, som motsvarar verbet *nennen*, benämna. Nämnaren benämner bråket, det vill säga ger bråket dess namn. De olika betydelserna blir tydliga om exempelvis ett bråk som $\frac{3}{4}$ betraktar som tre stycken fjärdedelar:

$$\frac{3}{4} = 3 \cdot \frac{1}{4}$$

Bråk kan vara lika på olika sätt. Två ord som lätt förväxlas är *liknämninga* och *likvärdiga* bråk. Eftersom nämnaren handlar om att benämna innebär liknämninga att bråken benämns på samma sätt. De har således samma nämnaren. Är det olika täljare innebär det att bråken representerar olika tal.

Följande bråk är liknämninga: $\frac{1}{8}$ $\frac{4}{8}$ $\frac{9}{8}$

Likvärdiga bråk har olika nämnare och olika täljare men representerar samma tal och kan därför också kallas för ekvivalenta.

Följande bråk är likvärdiga: $\frac{1}{2}$ $\frac{4}{8}$ $\frac{378}{756}$

Äkta och oäkta bråk

Förr skilde man mellan äkta bråk och oäkta bråk. Äkta bråk kallas också för *egentliga bråk* och representerar tal vars absolutbelopp är mindre än 1. Det går tillbaka på tanken om bråk som en sönderbruten del av en helhet. I ett äkta bråk är täljaren alltid mindre än nämnaren. Ett bråk vars absolutbelopp är större än 1 kallas oäkta, eller *oegentligt*. Det ser ut som ett bråk, kallas för bråk och behandlas som bråk, men det är egentligen inte en avbruten del av en hel.

Ett oäkta bråk kan antingen skrivas samlat med täljaren större än nämnaren, eller i blandad form där heltalsdelen separeras ut från bråkdelen, den del som är ett egentligt bråk.

$$\frac{5}{2} = 2\frac{1}{2} \quad \text{Underförstått betyder } 2\frac{1}{2} \text{ detsamma som } 2 + \frac{1}{2}$$

En svårighet med blandad form är att skrivsättet kan blandas ihop med algebraisk notation där $2x$ inte betyder $2 + x$ utan $2 \cdot x$. En fördel med blandad form är att den stämmer överens med decimaltalsnotationen där heltalsdelen skrivs före decimalkommat och delarna skrivs efter.

$$\frac{5}{2} = \frac{25}{10} = 2,5$$

Bråk, tal i bråkform och rationella tal

Ett bråk definieras som ett *uttryck* på formen a/b som beskriver förhållandet mellan a och b . Ibland är det relevant att inte betrakta bråket som ett tal om exempelvis själva förhållandet eller andelen är i fokus, eller om uttrycket ses som en division. Ibland är det fördelaktigt att betrakta bråket som ett tal för att kunna utföra beräkningar med det eller för att jämföra två bråk på tallinjen. I algebraisk modellering och ekvationslösning är det en stor fördel att kunna växla mellan de olika tolkningarna. När ett bråk representerar ett tal så är det ett *tal i bråkform* eller ett bråktal. I de bråk där a och b är heltal är bråket även ett *rationellt tal*, eftersom definitionen av ett rationellt tal är ett tal som går att skriva på formen a/b där a och b är heltal och $b \neq 0$. Alla rationella tal kan skrivas som tal i bråkform, men alla bråk är inte rationella tal, exempelvis är $\pi/3$ ett bråk men inte ett rationellt tal.

Termen *dubbelbråk* förekommer ibland. Ett dubbelbråk ser vid första anblicken inte ut som ett rationellt tal eftersom varken täljare eller nämnare är heltal, men ett dubbelbråk går alltid att förenkla till ett enkelt bråk genom att förlänga med nämnarens invers:

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}}{\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}}{1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

Bråk och division

I modern svensk skolmatematik har notationen av bråk och division smält samman. Tidigare användes andra divisionstecken, exempelvis : eller $\div$. Dessa förekommer fortfarande i många länder och i digitala verktyg. Fördelen med att ha samma tecken är att det i varje ögonblick blir möjligt att välja mellan den tolkning som är mest lämplig. Antingen betraktas uttrycket som en division, alltså som en operation mellan två tal, eller som ett förhållande mellan två tal, eller som ett tal i sig självt. Genom denna sammansmältning av symboler har även vissa ord försvunnit ur vårt språk. I uttrycket a/b kallas a för dividend och b för divisor. När undervisningen övergav långa divisionsalgoritmer såsom liggande stolen och trappan till förmån för kort division som skrivs med horisontellt bråkstreck försvann dessa ord och ersattes av orden täljare och nämnare. Även ordet kvot har blivit otydligt eftersom en kvot kan avse både ett förhållande mellan två tal och resultatet av en division. På engelska särskiljs dessa med de två orden *quotient* för resultatet av en division och *ratio* för förhållandet mellan dividend och divisor (eller mellan täljare och nämnare).

En nackdelen med att ord och symboler sammansmälter är att det blir svårt att påtala skillnader. Jämför följande två skrivsätt:

$$3 \div 4 = \frac{3}{4} \qquad \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

I det första fallet läser vi *3 dividerat med 4 är lika med tre fjärdedelar*. Vi förstår direkt att om vi delar 3 i fyra delar så blir varje del $3/4$. I det andra fallet är det oklart hur det ska utläsas och vad det ska betyda. Många elever och studenter vill inte acceptera $3/4$ som ett tal utan anser att divisionen inte är löst förrän de skrivit $3/4 = 0,75$. De är mer vana vid decimalbråk än vid allmänna bråk och väljer att skriva decimalbråken med decimalkomma. Det är praktiskt i situationer som pengar eller mätningar i ett decimalsystem, men mindre användbart inom algebran.



LITTERATUR

- Petersson, J. (2015). *Från brakljud till bråkbegrepp*. Nämnaren 2015:1.
Larsson, L. T. & Lundahl, N. (1913). *Aritmetisk exempelsamling*. P. A. Norstedts & Söners förlag.
Kiselman, C. & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan*. NCM, Göteborgs universitet.

Folkskolans vän
gupea.ub.gu.se/bitstream/2077/27452/1/gupea_2077_27452_1.pdf